DM n$^{\text{o}}$3 (non noté)

Pour la rentrée des vacances de Pâques

Exercice 1 - Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit n un entier naturel non nul, et $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ deux familles de réels telles que $x_1, ..., x_n$ sont tous distincts (mais pas nécessairement $y_1, ..., y_n$).

Le but de cet exercice est de démontrer de deux façons différentes qu'il existe un unique polynôme P de degré **inférieur ou égal à** $n-1$ tel que pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, $P(x_k) = y_k$.

Par exemple, étant donnés deux points du plan (x_1, y_1) et (x_2, y_2) tels que $x_1 \neq x_2$, il existe un unique droite passant par ces points, donc un unique polynôme f de degré 1 (c'est à dire une fonction affine) tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.

Partie I

1. Pour tout entier k dans $[\![1, n]\!]$, on pose pour tout réel x, $B_k(x) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x - x_j)$.
   (a) Justifier que pour tout indice k entre 1 et n, B_k est une fonction polynôme de degré $n-1$.
   (b) Vérifier que pour tous indices k et i entre 1 et n tels que $k \neq i$ on a $B_k(x_i) = 0$ et que $B_k(x_k) \neq 0$.
2. On pose pour tout indice k entre 1 et n et pour tout réel x, $L_k(x) = \dfrac{B_k(x)}{B_k(x_k)} = \dfrac{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x - x_j)}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j)}$.
   (a) Vérifier que L_k est une fonction polynôme de degré $n-1$.
   (b) Vérifier que pour tout $(k, i) \in [\![1, n]\!]^2$ on a $L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$
   (c) On pose $Q(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k(x)$. Montrer que Q répond au problème posé.
3. On souhaite désormais prouver l'unicité de la solution. On suppose que P et Q sont deux polynômes de degré $n-1$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(x_k) = Q(x_k) = y_k$.
   (a) Justifier que $P - Q$ est un polynôme de degré **inférieur ou égal à** $n-1$.
   (b) Montrer que $P - Q$ admet n racines distinctes. Conclure

Partie II

Soit $(x_1, ..., x_n)$ un n-uplets de réels fixés tel que les x_i sont tous distincts. On aborde cette-fois ci la question sous l'angle de l'algèbre linéaire en considèrant l'application φ définit sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \varphi(P) = (P(x_1), ..., P(x_n)) \in \mathbb{R}^n$$

4. Montrer que φ définit une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^n$.
5. Montrer que φ est injective.
6. Comparer les dimensions de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$. En déduire que φ est bijective.
7. Justifier enfin que pour tout n-uplet $y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\varphi(P) = y$, c'est à dire tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!], P(x_k) = y_k$.

Exercice 2

Soient b et r deux entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard dans cette urne. Après chaque tirage on remet la boule tirée dans l'urne et l'on y rajoute une deuxième boule de la même couleur que celle qui a été tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire indicatrice de l'événement « la n-ième boule tirée est blanche » — c'est à dire que X_n vaut 1 si la n-ième boule tirée est blanche, et 0 sinon. On note S_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n-ème tirage.

1. Déterminer la loi de X_1, puis la loi de X_2.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{E(S_n)}{b+r+n}$.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la variable X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

Désormais on suppose que $b = r = 1$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$ et calculer $P(S_n = n+1)$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P(S_n = k)$$

   En déduire que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Exercice 3 - Application du théorème des accroissements finis

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat du cours sur les séries de Riemann.

Cas où $\alpha \leq 0$

1. Montrer que si $\alpha \leq 0$, alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Cas où $\alpha = 1$

2. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que pour tout entier naturel n strictement positif :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

   Indication : on pourra appliquer le TAF à la fonction $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[n, n+1]$

3. En déduire que pour tout entier naturel N strictement positif :

$$\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1) - \ln(n)) \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \leq 1 + \sum_{n=1}^{N-1}(\ln(n+1) - \ln(n))$$

4. En déduire que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Cas où $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$

Dans toute la suite de l'exercice, α est un réel strictement positif fixé et différent de 1.

5. On pose pour tout réel x strictement positif, $f(x) = x^{1-\alpha}$.
   (a) **(énoncé corrigé)** Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout x dans l'intervalle $[n, n+1]$ on a :

$$\frac{|1-\alpha|}{(n+1)^\alpha} \leq |f'(x)| \leq \frac{|1-\alpha|}{n^\alpha}$$

(b) **(énoncé corrigé)** En déduire en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\frac{|1-\alpha|}{(n+1)^\alpha} \leq \left|\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right| \leq \frac{|1-\alpha|}{n^\alpha}$$

6. **(énoncé corrigé)** En utilisant le résultat de la question 2, montrer que pour tout entier naturel N non nul on a :

$$\frac{1}{|1-\alpha|}\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{|1-\alpha|}\sum_{n=1}^{N-1}\left|\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right|$$

7. **(énoncé corrigé)** En déduire que pour tout entier naturel N non nul :

$$\frac{1}{\alpha-1}\left|1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left|1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right|$$

8. En déduire que $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.